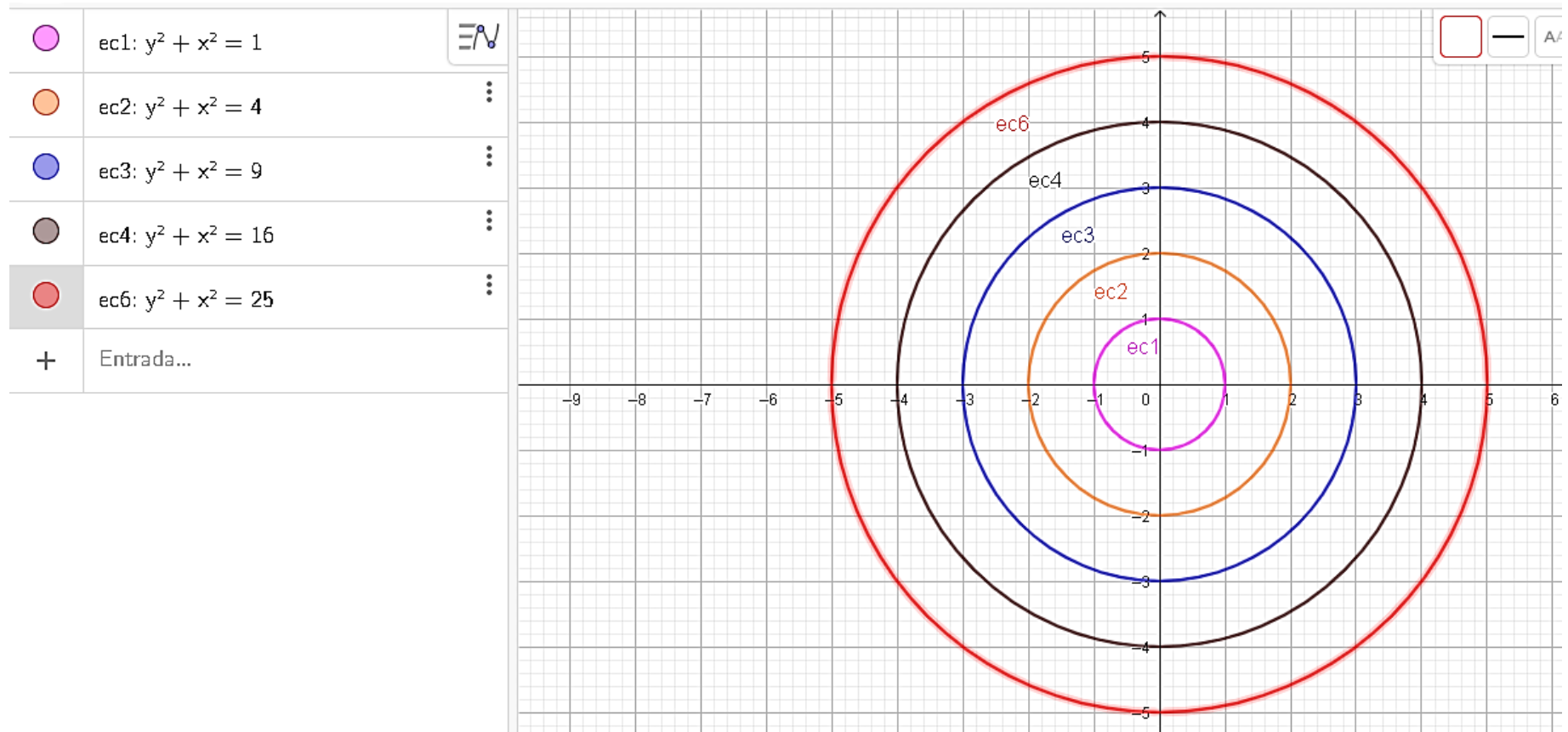


1. Nota

Una manera de dar una interpretación geométrica de las soluciones generales y particulares es la siguiente. Considera la ecuación diferencial $y'y + x = 0$ cuya solución general es $y^2 + x^2 = C^2$. Si graficamos esta solución para diferentes valores de C el resultado será una familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen como las mostradas en la figura. Este tipo de curvas son llamadas curvas solución o familia uniparamétrica de soluciones.

Para este caso, la representación geométrica de la solución particular con $C = 3$, es decir $y^2 + x^2 = 9$, se muestra en color azul.

$$y = \pm \sqrt{C^2 - x^2}, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{C^2 - x^2}}$$



2. Problema de valor inicial: ejemplo Mediante el método de separación de variables, será posible calcular la solución general de $\frac{dy}{dx} = 2y$, la cual es

$$y = Ce^{2x}; \forall x \in (-\infty, \infty).$$

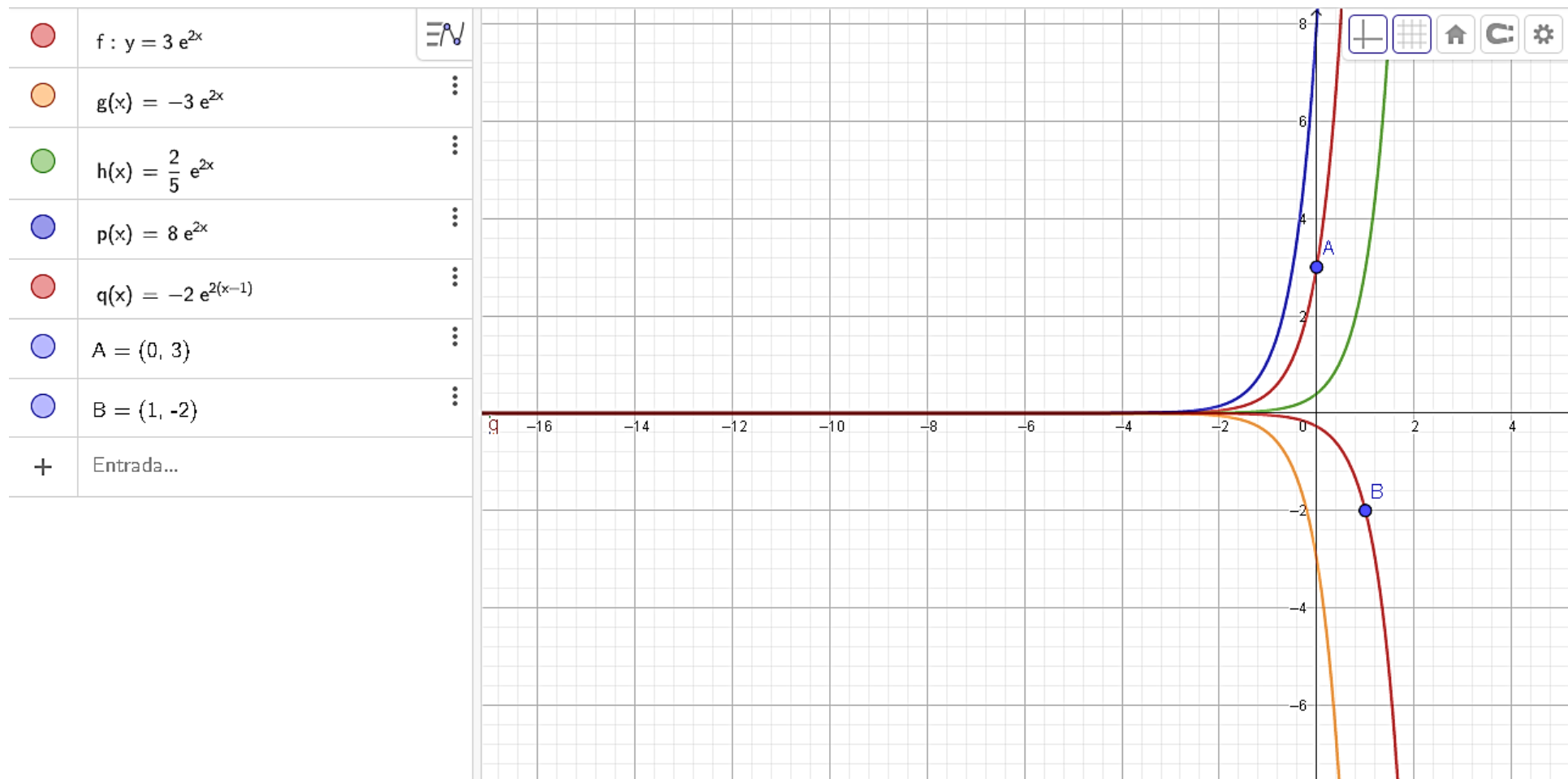
Esta expresión genera toda una familia de curvas solución, sin embargo, supongamos que estamos interesados únicamente en aquel elemento de la familia que pasa por el punto $(0, 3)$, es decir, que satisface la condición $y(0) = 3$. Sustituyendo esta información en la solución general, obtenemos $C = 3$: Entonces, la solución particular que estamos buscando es

$$y = 3e^{2x}$$

Si ahora hacemos que la curva solución pase por el punto $(1, -2)$, es decir que satisface la condición inicial $y(1) = -2$, tenemos $-2 = Ce^2$; tenemos que $C = -2e^{-2}$

La nueva solución condición inicial es:

$$y = -2e^{-2}e^{2x} = -2e^{2(x-1)}$$



3. Nota

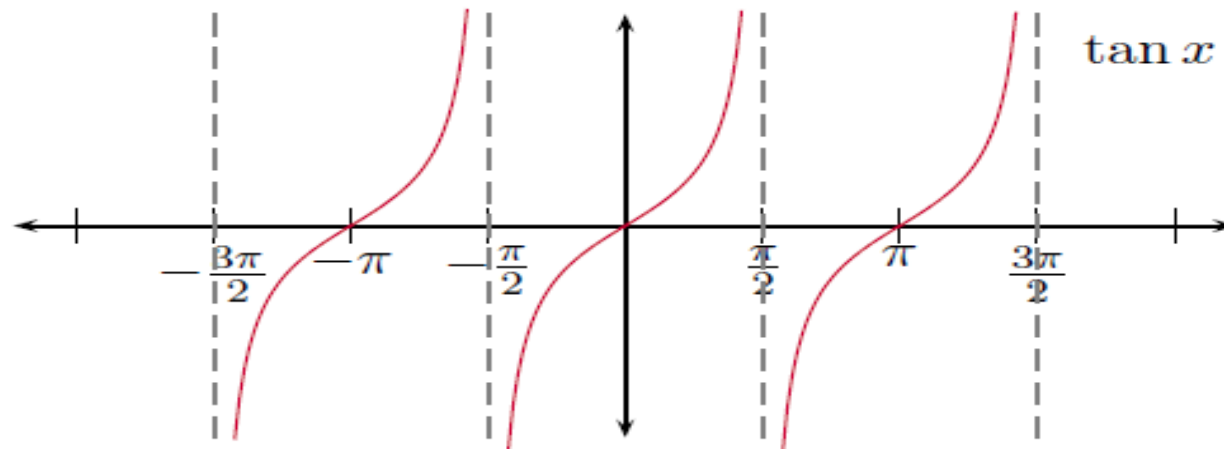
Intervalo de definición: No es posible considerar una solución de una ecuación ordinaria sin pensar al mismo tiempo en un intervalo. El intervalo dependerá de la ecuación y de la solución. Este intervalo puede ser abierto (a, b) , un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞) , etc...

Ejemplo

$$y' = \tan x$$

Consideremos la ecuación

Pregunta: ¿Cuál es el dominio de definición de la ecuación?

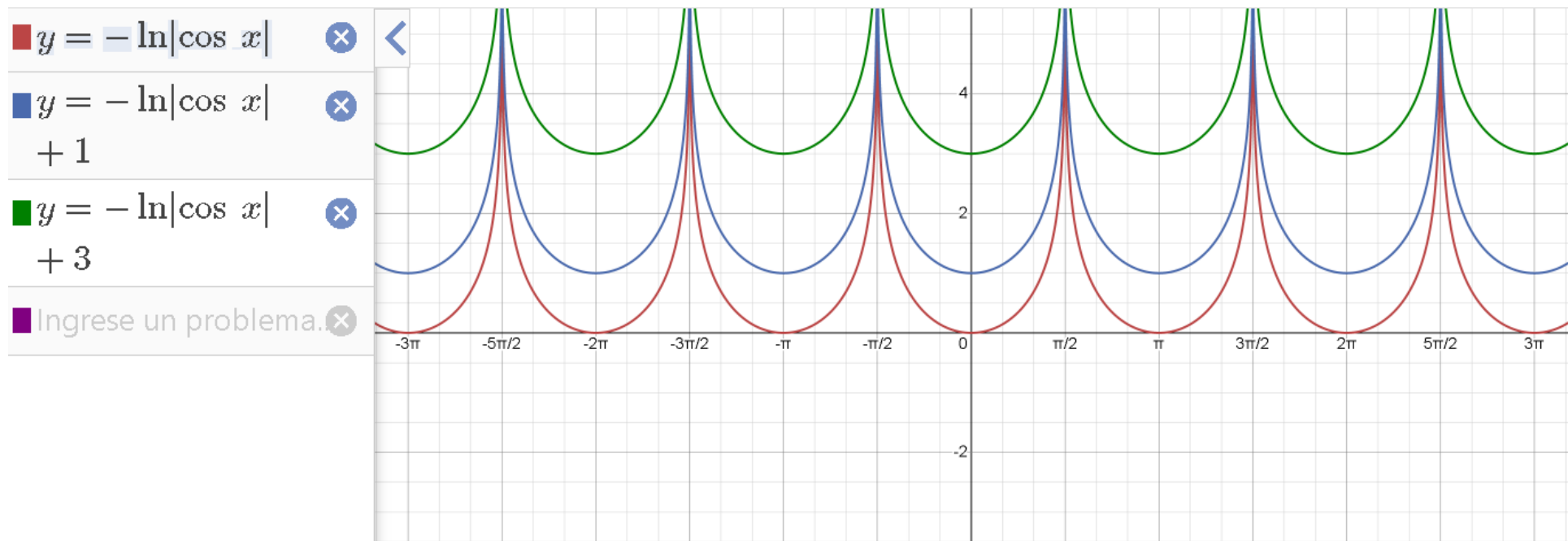


La ecuación está definida en todos los puntos del plano xy , excepto en aquellos puntos donde x es un múltiplo de $\pi/2$ y es continua en los intervalos

$$I_k = \left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Puesto que $\tan x$ es continua en I_k , al integrar se obtiene la solución general de la ecuación diferencial

$$y = g(x) = -\ln |\cos(x)| + c$$



4. Nota La continuidad de una función f garantiza que

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx + c, \quad c \text{ una constante}$$

5. Ejemplo. Consideremos la siguiente ecuación $xy' + y - y \ln(xy) = 0$.
 ¿**Dominio de la ecuación**? El Dominio está definido solamente cuando x y y son ambos positivos o ambos negativos.

Compruebe que $y = \frac{1}{x} e^{cx}$, es solución de la ecuación

$y = \frac{1}{x} e^x$



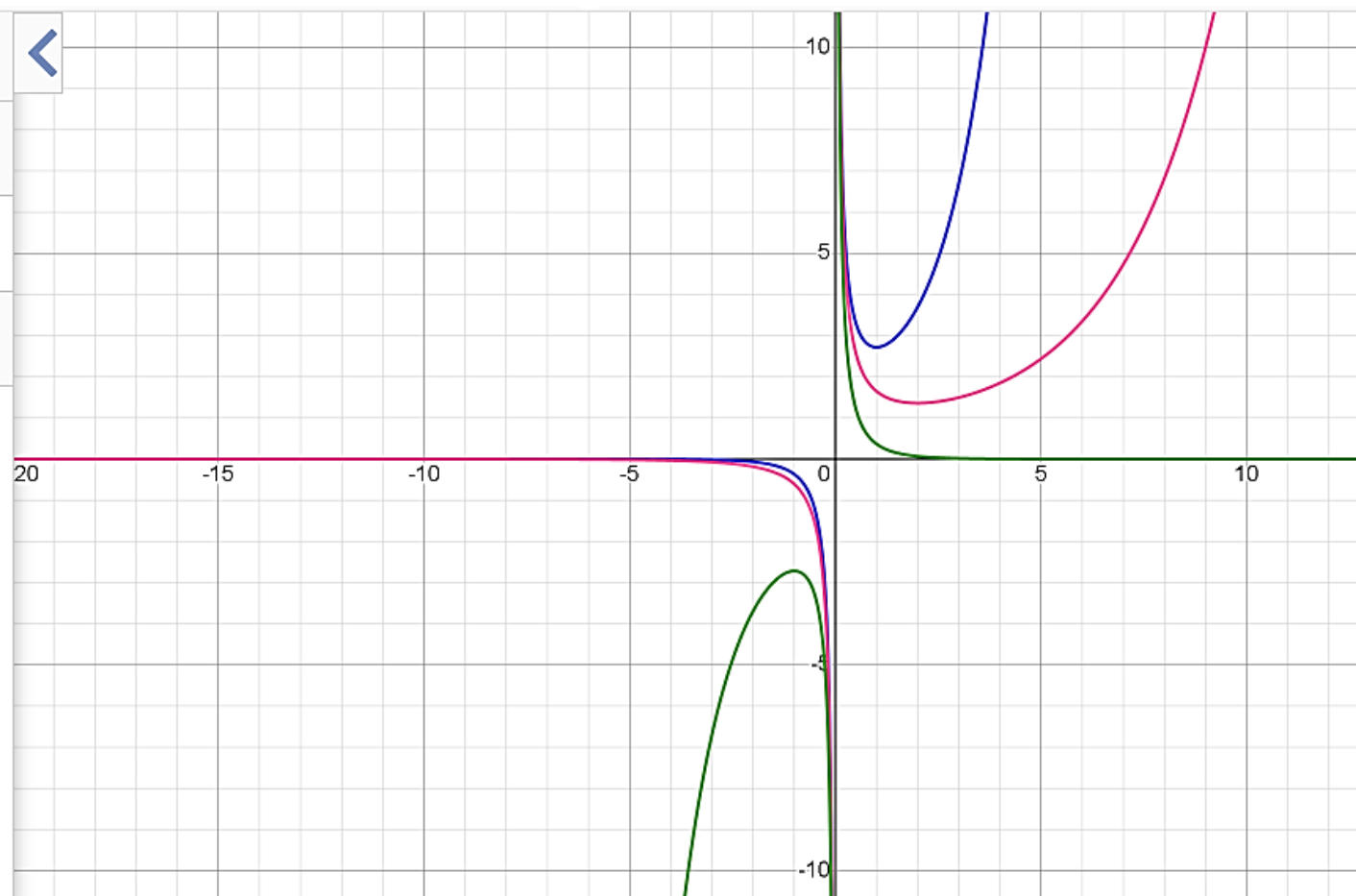
$y = \frac{1}{x} e^{0.5x}$



$y = \frac{1}{x} e^{-x}$



Ingrese un problema.



Existencia y unicidad de un problema de valor inicial

Recordemos que un problema de valores iniciales de primer orden y segundo orden los podemos colocar de la forma

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$	Sujeto a $y(x_0) = y_0$ (2)
$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$	Sujeto a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$

Para un problema de valores iniciales de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \text{ con } (x_0, y_0) \in \text{Dom } f \quad (2)$$

Existencia:	¿ La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene solución (es)? ¿Alguna de las curvas solución contiene el punto (x_0, y_0) ?
Unicidad:	¿ En qué momento podemos estar seguros de que existe Solo una curva solución que contiene al punto (x_0, y_0) ?

Existencia y unicidad de un problema de valores iniciales (PVI)

Sea $(x_0, y_0) \in \text{Dom } f$, donde $\text{Dom } f$ es la región rectangular

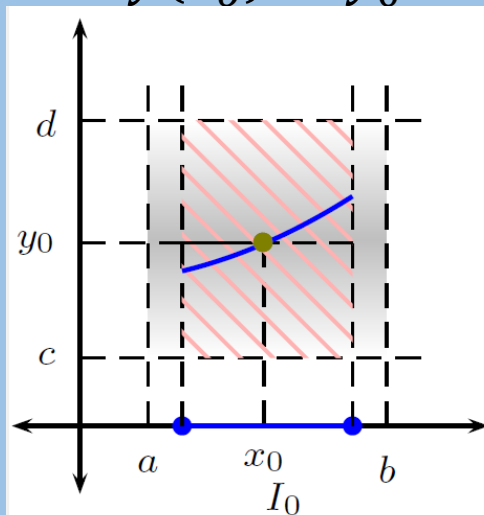
$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\text{Dom } f$, entonces existe un intervalo

$I_0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ con $h > 0$ contenido en $a \leq x \leq b$

y **una función única $y(x)$** definida en I_0 que representa la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Ejemplo

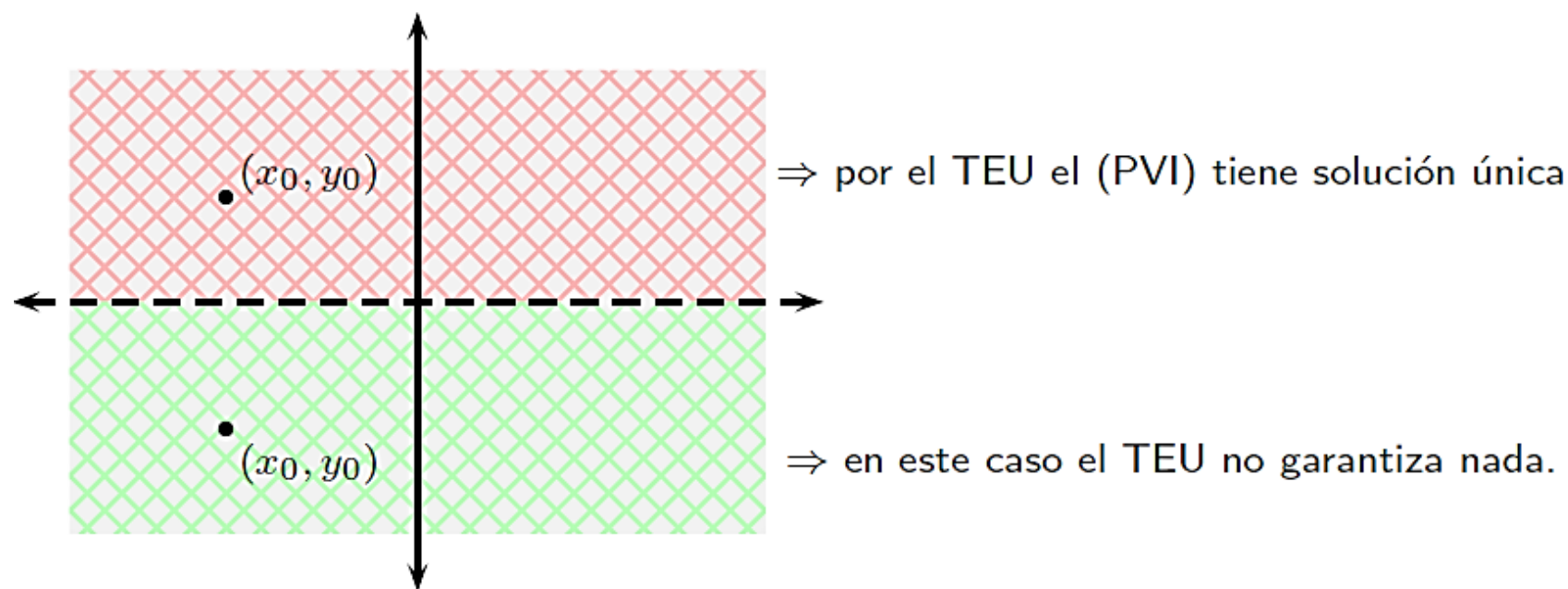
Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = x^3 y^{1/2} \quad y(x_0) = y_0$$

Al hacer el análisis vemos que

$$f(x, y) = x^3 y^{1/2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{2y^{1/2}}$$

estas funciones son continuas en la mitad del plano superior definido por $y > 0$.



Problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Tenemos que

- $f(t, y) = -\frac{y^2}{t^2}$ es continua en $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -\frac{2y}{t^2}$ es continua en $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

El Teorema de existencia y unicidad (TEU) permite concluir que para cualquier (t_0, y_0) con $t_0 \neq 0$ hay un intervalo centrado en t_0 en el que el PVI tiene solución única. Para el caso $t_0 = 0$ el teorema no afirma nada.

Las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Esto significa que cuando $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son continuas en una región rectangular D , debe siempre seguir que existe una solución de la ecuación (2) y es única siempre que (x_0, y_0) sea un punto interior a D . Sin embargo si las condiciones establecidas en la hipótesis del teorema no **son válidas**, entonces puede ocurrir cualquier cosa: el problema de la ecuación (2) *puede* tener una solución y esta solución *puede* ser única o la ecuación (2) puede tener varias soluciones o puede no tener ninguna solución.

Considerando el PVI

$$y' = x^3 y^{1/2} \quad y(0) = 0$$

Tenemos que

- $f(x, y) = x^3 y^{1/2}$ es continua en el semiplano $y \geq 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{2y^{1/2}}$ es continua en el semiplano $y > 0$

el teorema de existencia y unidad no garantiza nada, en el sentido que es posible que el PVI no tenga ninguna solución, tenga una única o tenga infinitas soluciones.

Se puede probar que las dos funciones (distintas) dadas a continuación son soluciones del PVI

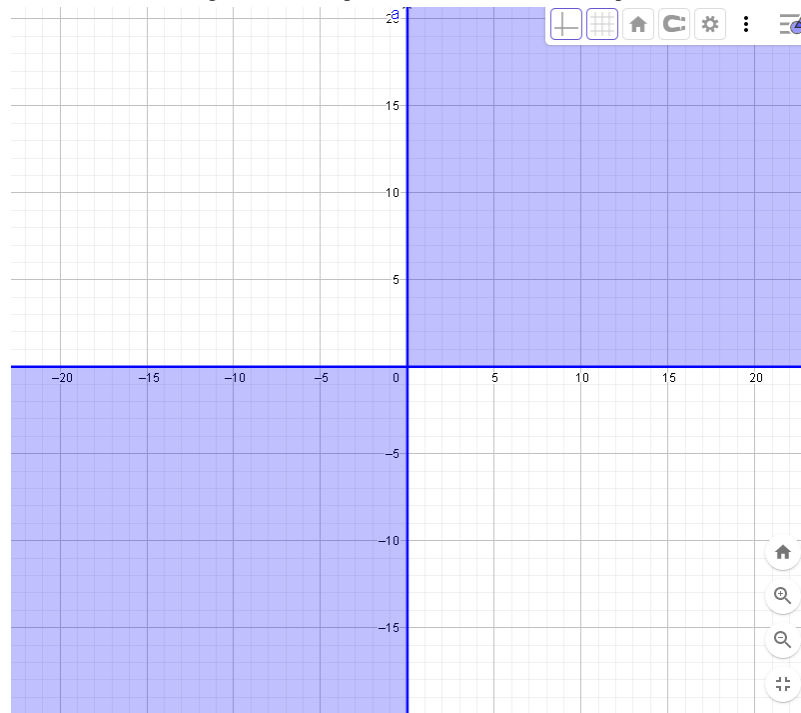
$$y = 0 \qquad y = \frac{x^8}{64}$$

- Ejemplo

Determine una región del plano xy para el que la ecuación diferencial deba tener una solución única cuyas graficas pasen por el punto (x_0, y_0) en la región

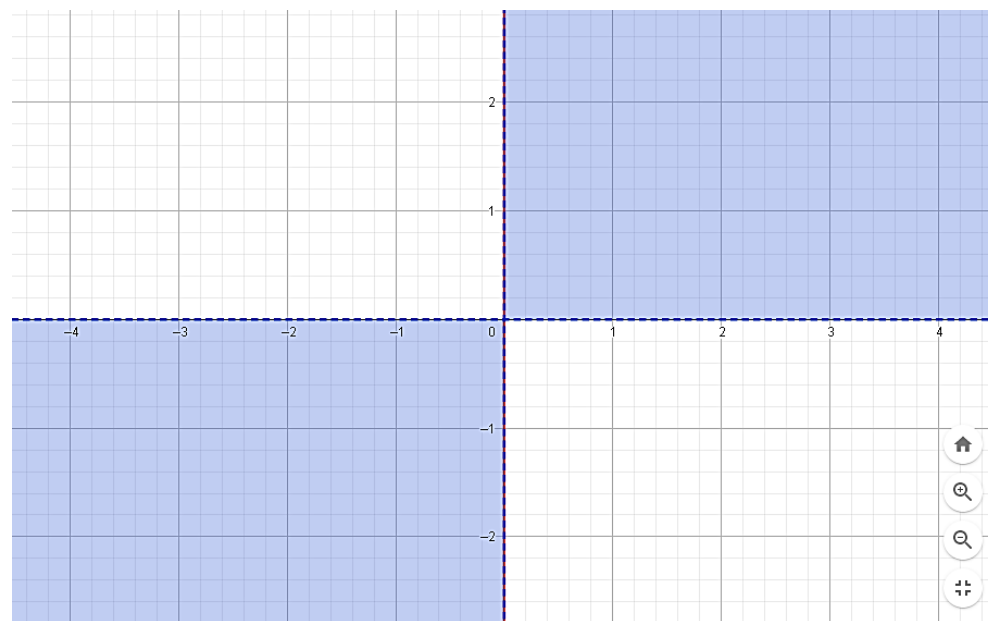
1. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

$f(x, y) = \sqrt{xy}$, Es continua en $D_1 = \{(x, y): xy \geq 0\}$
 $= \{(x, y), x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0\}$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$D = \{(x, y): xy \geq 0, y \neq 0\} = \{(x, y), x \geq 0, y > 0 \vee x \leq 0, y < 0\}.$$

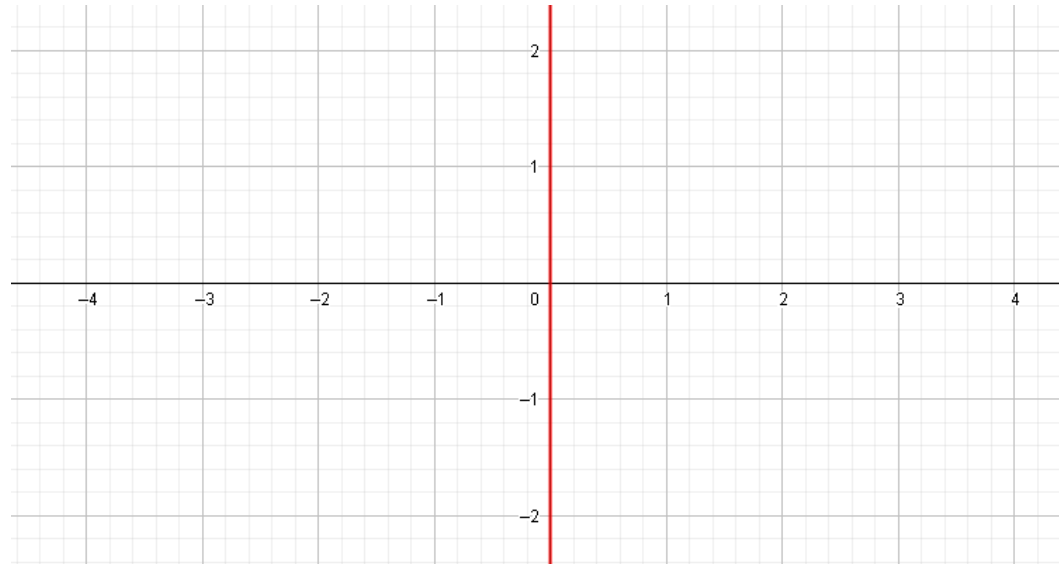


$$\text{II. } x \frac{dy}{dx} = y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x}, \text{ es continua en } D_1 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \ x \neq 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$D = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} \ x \neq 0\} = \{(x, y): y \in \mathbb{R}, x < 0 \vee x > 0\}$$



$$\text{III. } (y - x)y' = y + x, \quad \frac{df}{dy} = \frac{y+x}{y-x}$$

$$D_1 = \{(x, y): y \neq x\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1(y - x) - 1(y + x)}{(y - x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y - x - y - x}{(y - x)^2} = \frac{-2x}{(y - x)^2}$$

$$D = \{(x, y): y \neq x\} = \{(x, y): y < x \vee y > x\}$$

