

CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.1 Conceptos básicos

En este capítulo trataremos sobre el procedimiento que debemos llevar a cabo para obtener la solución general de la ED lineal no homogénea de orden n :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

Con este objetivo realizaremos un estudio detallado sobre la forma de resolver a la ED lineal no homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

y para esto trataremos primero con la ED lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Así, una vez obtenida la solución general de la homogénea, resolveremos la no homogénea.

- Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es de la forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (4.1)$$

Es decir, los coeficientes de y así como de sus dos derivadas dependen sólo de x (o son constantes) y los exponentes de y y sus derivadas son 1.

La parte izquierda de la ecuación diferencial es un **operador L** que asocia funciones a funciones, es decir, L es una función de funciones:

$$L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

donde $\mathcal{F}$ es el conjunto de funciones reales de variable real que son derivables a cualquier orden.

- L se define como sigue:

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

- Una **solución** de la ecuación diferencial (4.1) es una función $f(x) \in \mathcal{F}$ que cumple:

$$L[f(x)] = 0.$$

Es decir, al sustituir $f(x)$ y sus derivadas correspondientes en la ecuación diferencial, se satisface a la ED.

- **Resolver** la ecuación diferencial (4.1) significa encontrar todas sus soluciones.

Ejemplo 4.1.1 La siguiente es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

En este caso

$$L(y) = x^2 y'' + 2xy' - 6y.$$

1. Si $f(x) = x$, calcular $L[f(x)]$.
2. Si $g(x) = x^2$, calcular $L[g(x)]$.



1. Si $y = f(x) = x$, calcular $L(x)$.

(Sabemos en este caso que $y' = 1$ & $y'' = 0$.)

$$L(y) = L[f(x)] = L(x) = x^2(0) + 2x(1) - 6x = 2x - 6x = -4x.$$

Por consiguiente, la función $y = x$ no es solución de la ecuación diferencial $L(y) = 0$.

2. Si $y = g(x) = x^2$, calcular $L(x^2)$.

(Sabemos en este caso que $y' = 2x$ & $y'' = 2$.)

$$L(y) = L[g(x)] = L(x^2) = x^2(2) + 2x(2x) - 6x^2 = 2x^2 + 4x^2 - 6x^2 = 0.$$

Este último resultado nos dice que la función $y = x^2$ es solución de la ecuación diferencial $L(y) = 0$.

□ El operador L tiene las siguientes propiedades:

- Si y es solución de $L(y) = 0$, entonces $\bar{y} = cy$ también es solución; donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

▼ Como y es solución de $L(y) = 0$, entonces:

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Aplicando el operador $L(y)$ a la función $\bar{y} = cy$, se tiene que

$$\begin{aligned} L(\bar{y}) &= L(cy) = a_2(x)(cy)'' + a_1(x)(cy)' + a_0(x)(cy) = \\ &= a_2(x) \cdot cy'' + a_1(x) \cdot cy' + a_0(x) \cdot cy = \\ &= c \underbrace{[a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y]}_{L(y)=0} = \\ &= c \cdot L(y) = c \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{y} = cy$ es solución.

□

- Si y_1 & y_2 son soluciones de $L(y) = 0$, entonces $y_1 + y_2$ también es solución.

▼ Como y_1 & y_2 son soluciones de $L(y) = 0$, entonces:

$$L(y_1) = a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0.$$

$$L(y_2) = a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$$

Al usar en $L(y)$ la función $y = y_1 + y_2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= a_2(x)(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_0(x)(y_1 + y_2) = \\ &= a_2(x)[y_1'' + y_2''] + a_1(x)[y_1' + y_2'] + a_0(x)[y_1 + y_2] = \\ &= \underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{L(y_1)=0} + \underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{L(y_2)=0} = \\ &= L(y_1) + L(y_2) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_1 + y_2$ es solución. □

Podemos resumir las propiedades anteriores como sigue:

- Si $L(y) = 0$ y si c es una constante, entonces $L(cy) = cL(y) = 0$.
- Si $L(y_1) = 0$ y si $L(y_2) = 0$, entonces $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$.

Tomando en cuenta lo anterior se cumple lo siguiente:

- Si $L(y_1) = 0$ y si $L(y_2) = 0$, entonces $L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$, donde c_1 & c_2 son constantes arbitrarias.
- ▼ En efecto, si $L(y_1) = 0$ y si $L(y_2) = 0$, entonces:

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = L(c_1y_1) + L(c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

□

Ejemplo 4.1.2 Sea la ecuación diferencial

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0.$$

Comprobar que $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ & $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ son soluciones de la ED $L(y) = 0$.

▼ Primero comprobamos que $y_1 = e^{-x}$ es solución:

$$y_1 = e^{-x} \Rightarrow y_1' = -e^{-x} \Rightarrow y_1'' = e^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_1) = L(e^{-x}) = e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} = 0.$$

De igual forma, para $y_2 = xe^{-x}$:

$$y_2 = xe^{-x} \Rightarrow y_2' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y_2'' = -2e^{-x} + xe^{-x}.$$

Entonces:

$$L(y_2) = L(xe^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} + 2(e^{-x} - xe^{-x}) + xe^{-x} = 0.$$

Finalmente, para $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ se tiene:

$$L(\bar{y}) = L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1(0) + c_2(0) = 0.$$

Por lo cual, $\bar{y} = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$ es también solución de la ED. □

4.1.1 Combinaciones lineales

- Dadas dos funciones $y_1 \in \mathcal{F}$ & $y_2 \in \mathcal{F}$, se dice que la función

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad \text{donde } c_1 \in \mathbb{R} \text{ & } c_2 \in \mathbb{R} \text{ son constantes arbitrarias,}$$

es una **combinación lineal** de las funciones y_1 & y_2 .

Nótese que en el ejemplo 4.1.2 vimos que las funciones $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$ & $\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ son soluciones de

$$L(y) = y'' + 2y' + y = 0.$$

Entonces, por la definición anterior, se puede afirmar que toda combinación lineal de las funciones $y_1 = e^{-x}$ & $y_2 = xe^{-x}$ también es solución de $L(y) = 0$.

- Definimos a la **recta generada por una función** $f \in \mathcal{F}$, como el conjunto R_f de todas las combinaciones lineales de esa función, que en este caso es el conjunto de todos los múltiplos de la función:

$$R_f = \left\{ cf \mid c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{F}.$$

Una representación de este concepto:



Estamos dando una representación en analogía con los vectores.

Ejemplo 4.1.3 La recta generada por la función $f(x) = x^2$ es

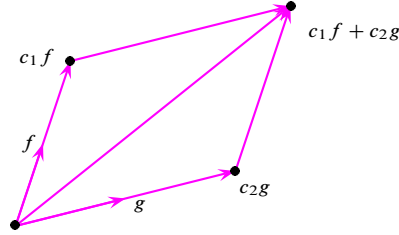
$$R_{x^2} = \left\{ cx^2 \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ▼ Así las funciones $g(x) = 5x^2$ & $h(x) = -\frac{2}{7}x^2$ pertenecen a esta **recta**. □

- Dos funciones f & g son **colineales** cuando pertenecen a una misma recta. Esto es, cuando una es un múltiplo de la otra.
- Definimos al **plano generado por dos funciones no colineales** $y_1 = f(x)$ & $y_2 = g(x)$ como el conjunto $\Pi_{f,g}$ de todas las combinaciones lineales de las funciones:

$$\Pi_{f,g} = \left\{ c_1 f + c_2 g \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{F}.$$

Podemos visualizar este plano como sigue:



Ejemplo 4.1.4 El plano generado por las funciones $y_1 = x^2$ & $y_2 = \sin x$ es

$$\Pi_{x^2, \sin x} = \left\{ c_1 x^2 + c_2 \sin x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

▼ Así la función $g(x) = -x^2 + 7 \sin x$ está en este plano, tomando $c_1 = -1$ & $c_2 = 7$. Igualmente la función $i(x) = 30x^2 - 9 \sin x$ está en el plano, tomando $c_1 = 30$ & $c_2 = -9$.

□

Teorema 4.1 de Existencia y Unicidad

Dado el siguiente PVI:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad \text{con } y(x_0) = y_0 \text{ y con } y'(x_0) = y_1. \quad (4.2)$$

Si suponemos que $a_2(x) \neq 0$, $a_1(x)$ & $a_0(x)$ son funciones continuas en un intervalo I y si $x_0 \in I$, entonces el PVI tiene una solución única $y(x)$ para $x \in I$.

4.1.2 Solución de un problema con condiciones iniciales

Suponiendo que podemos encontrar dos soluciones y_1 & y_2 no colineales de la ED lineal homogénea:

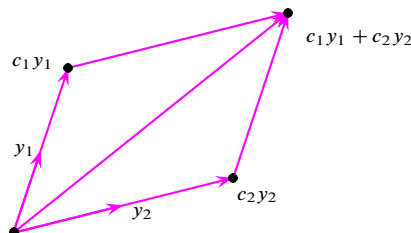
$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y que generamos con estas dos soluciones el plano:

$$\Pi_{y_1, y_2} = \left\{ c_1 y_1 + c_2 y_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

queremos saber bajo qué condiciones la solución del PVI (4.2) es una función que está en este plano. Es decir, cuándo la solución, que se menciona que existe y es única, es de la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$



Para que esto suceda, dicha solución debe cumplir las condiciones iniciales. Puesto que:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

De las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, para que la solución del PVI (4.2) exista en el plano mencionado, deben existir las constantes c_1 & c_2 que satisfagan el sistema (4.3). Éste es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas c_1 y c_2 . Sabemos que un sistema de este tipo tiene solución única si su determinante es diferente de cero. En este caso, el determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

En consecuencia, para resolver el PVI (4.2), se tienen que encontrar dos soluciones y_1 & y_2 que satisfagan:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.1.3 El wronskiano

- Dadas dos funciones $y_1 \in \mathcal{F}$ & $y_2 \in \mathcal{F}$, se define el **wronskiano** de estas funciones como sigue:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.5 Calcular el wronskiano de las funciones $y_1 = \cos x$ & $y_2 = \sin x$.

▼

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ (\cos x)' & (\sin x)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

□

Con esta nueva definición, podemos afirmar:

- Para resolver el PVI, basta con encontrar dos soluciones y_1 & y_2 de la ecuación diferencial lineal homogénea cuyo wronskiano sea diferente de cero. El conjunto de todas las soluciones es entonces el plano generado por estas funciones. La solución del PVI es un elemento (un vector) de este plano. Por esto, denominamos solución general de la ED a la combinación lineal:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- Un conjunto de funciones $\{y_1, y_2\}$ que cumple con la condición anterior se llama un **conjunto fundamental de soluciones**.

Es decir, un conjunto $\{y_1, y_2\}$ será un conjunto fundamental de soluciones si:

1. Cada y_i es solución de la ED.
2. y_1 & y_2 no son colineales.

Ejemplo 4.1.6 Encontrar la solución general de la ED:

$$y'' + y = 0.$$

▼ Es fácil ver que las funciones $y_1 = \cos x$ & $y_2 = \sin x$ son soluciones de la ED. Por el ejemplo 4.1.5 estas funciones tienen wronskiano no nulo. Por lo tanto la solución general de la ED es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

□

CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.2 Reducción de orden

Hallar un método para encontrar soluciones que formen un conjunto fundamental de la ED será nuestro trabajo en las siguientes secciones.

4.2.1 Reducción de orden en ED lineales de segundo orden

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

de la cual se conoce una solución que llamaremos y_1 . De acuerdo con lo visto en la sección anterior, requerimos una segunda solución y_2 de la ecuación diferencial de tal manera que el conjunto $\{y_1, y_2\}$ constituya un conjunto fundamental de soluciones.

A fin de encontrar esta segunda solución, aplicaremos un método llamado variación de parámetros que se debe a D'Alembert.

La idea fundamental es la siguiente: debido a que la ecuación es lineal, y dado que y_1 es solución, entonces ay_1 para a constante, también es solución. La pregunta que se formula en este método es ¿cómo encontrar una función u , de tal manera que $y_2 = uy_1$ también sea solución de la ecuación?

Para el desarrollo de la idea de D'Alembert, requerimos, en primer lugar, normalizar la ecuación; esto es, necesitamos que el coeficiente de y'' sea 1. Para ello, dividimos la ecuación entre $a_2(x)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \text{ donde } p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ y donde } q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}, \text{ con } a_2(x) \neq 0.$$

Queremos ahora determinar bajo qué condiciones podemos asegurar que $y_2 = uy_1$ es solución. Constatamos que, por ser y_1 solución de la ED, tenemos:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0.$$

Si derivamos y_2 dos veces, hallamos:

$$\begin{aligned}y_2 &= uy_1. \\y_2' &= uy_1' + u'y_1. \\y_2'' &= uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, obtenemos:

$$\underbrace{uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1}_{y_2''} + \underbrace{py_1' + pu'y_1}_{py_2'} + \underbrace{qy_1u}_{qy_2} = 0.$$

Reagrupamos en términos de u, u', u'' y así resulta:

$$\underbrace{u(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{L(y_1)=0} + y_1u'' + 2y_1'u' + py_1u' = 0 \Rightarrow y_1u'' + 2y_1'u' + py_1u' = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable $w = u'$, se tiene $u'' = w'$, por lo que la ED se reduce a otra de orden uno, concretamente:

$$y_1w' + 2y_1'w + py_1w = 0 \Rightarrow y_1 \frac{dw}{dx} + 2y_1'w + py_1w = 0.$$

Si escribimos ahora la ecuación en forma diferencial, hallaremos:

$$y_1dw + 2y_1'w dx + py_1w dx = 0.$$

Esta última expresión es una ED que puede resolverse mediante separación de variables. En efecto, multiplicando por $\frac{1}{wy_1}$, tenemos:

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + p dx = 0.$$

Integrando, encontramos:

$$\int \frac{dw}{w} + 2 \int \frac{y_1'}{y_1} dx + \int p dx = C \Rightarrow \ln w + 2 \ln y_1 + \int p dx = C.$$

Aplicando propiedades de logaritmos encontramos:

$$\ln(y_1^2 w) + \int p dx = C \Rightarrow \ln(y_1^2 w) = C - \int p dx.$$

Si ahora aplicamos la función exponencial,

$$y_1^2 w = e^{C - \int p dx} = e^C e^{-\int p dx} = C e^{-\int p dx}.$$

Así,

$$w = \frac{du}{dx} = C \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} \Rightarrow u = C \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx + K.$$

De esta manera, cualesquiera de las funciones $u \neq 0$ que resulten de esta fórmula será de utilidad para construir una segunda solución $y_2 = uy_1$. Como

$$\begin{aligned}W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & uy_1 \\ y_1' & uy_1' + u'y_1 \end{vmatrix} = \cancel{uy_1 y_1'} + u'y_1^2 - \cancel{uy_1 y_1'} = u'y_1^2 = \\ &= C \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} (y_1^2) = C e^{-\int p dx} \neq 0,\end{aligned}$$

resulta que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Tomamos el caso más sencillo para la función u , esto es $C = 1$ y $K = 0$; u toma la forma de

$$u = \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado:

- Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.1)$$

y una solución no nula y_1 , entonces:

1. La función $y_2 = uy_1$, donde

$$u = \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx,$$

es también solución y, además, $\{y_1, y_2\}$ conforma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

2. La solución general de la ED (4.1) está dada por:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ejemplo 4.2.1 Consideremos la ED lineal homogénea de segundo orden $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$.

1. Verificar que $y_1 = x^2$ es una solución de la ED.
2. Encontrar una segunda solución y_2 de la ecuación.
3. Escribir la solución general de la ecuación.



1. En primer lugar calculamos la primera y segunda derivada de y_1 :

$$y_1 = x^2 \Rightarrow y_1' = 2x \quad \& \quad y_1'' = 2.$$

Si sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\underbrace{x^2 (2)}_{y_1''} + 2x \underbrace{(2x)}_{y_1'} - 6 \underbrace{(x^2)}_{y_1} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x^2 = 0,$$

concluimos que y_1 es una solución de la ecuación diferencial.

2. Usamos ahora el resultado anterior. Determinamos u .

Primero necesitamos normalizar la ecuación para lo cual dividimos entre x^2 . Obtenemos:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0.$$

Usamos la fórmula del resultado anterior con $p = \frac{2}{x}$ & $y_1 = x^2$; encontramos:

$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{(x^2)^2} dx = \int \frac{e^{-2 \ln x}}{x^4} dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^4} dx = \int \frac{x^{-2}}{x^4} dx = \int x^{-6} dx = -\frac{1}{5}x^{-5}.$$

Por lo tanto, $y_2 = uy_1 = -\frac{1}{5}x^{-5} \cdot x^2 = -\frac{1}{5}x^{-3}$.

3. La solución general es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 \left(-\frac{1}{5} x^{-3} \right) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$

□

Ejemplo 4.2.2 Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0; \quad y_1(x) = x.$$

▼ Vamos a usar dos procedimientos.

1. Procedimiento 1: uso de la fórmula.

Primero, normalizamos la ED; para ello, dividimos entre x^2 :

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 0.$$

Usamos ahora la fórmula de esta sección con $p = \frac{2}{x}$ & $y_1 = x$; encontramos:

$$u = \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{x^2} dx = \int \frac{e^{-2 \ln x}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\ln(x^{-2})}}{x^2} dx = \int \frac{x^{-2}}{x^2} dx = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$y_2 = u y_1 = -\frac{1}{3} x^{-3} x = -\frac{1}{3} x^{-2}.$$

Así, la solución general de la ED es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-2}.$$

O bien

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2}.$$

2. Procedimiento 2: sustitución de $y_2 = u(x)y_1(x)$.

Si $y_2 = ux$, entonces:

$$y_2' = u'x + u \quad \& \quad y_2'' = u''x + 2u'.$$

Sustituimos en la ED para garantizar que $y_2 = u y_1$ sea solución:

$$x^2 y_2'' + 2x y_2' - 2y_2 = 0.$$

Se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x^2(u''x + 2u') + 2x(u'x + u) - 2(ux) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 u'' + 2x^2 u' + 2x^2 u' + 2xu - 2xu &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 u'' + 4x^2 u' &= 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre x^3 :

$$u'' + \frac{4}{x} u' = 0. \quad (4.2)$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \frac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} + \frac{4}{x}w &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{4}{x}w \Rightarrow \frac{dw}{w} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -4 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -4 \ln x + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln w = \ln x^{-4} + \ln C_1 = \ln(C_1 x^{-4}) \Rightarrow w = C_1 x^{-4}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}w = u' = \frac{du}{dx} &\Rightarrow \frac{du}{dx} = C_1 x^{-4} \Rightarrow u = C_1 \int x^{-4} dx = C_1 \frac{x^{-3}}{-3} + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = \frac{C_1}{-3} x^{-3} + C_2 \Rightarrow u = C_1 x^{-3} + C_2.\end{aligned}$$

Si tomamos $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, obtenemos que $u = x^{-3}$.

Pero $y_2(x) = ux$, por lo tanto:

$$y_2(x) = x^{-3}x = x^{-2} \Rightarrow y_2(x) = x^{-2}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 x^{-2}.$$

□

Ejemplo 4.2.3 Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED proporcionada y escribir su solución general.

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0; \quad y_1(x) = x^{-1}.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}y_2 &= ux^{-1}; \\ y_2' &= u'x^{-1} - ux^{-2}; \\ y_2'' &= u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned}x^2(u''x^{-1} - 2u'x^{-2} + 2ux^{-3}) + 3x(u'x^{-1} - ux^{-2}) + ux^{-1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u''x - 2u' + 2ux^{-1} + 3u' - 3ux^{-1} + ux^{-1} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u''x + u' &= 0.\end{aligned}$$

Dividiendo entre x para normalizar la ED:

$$u'' + \frac{1}{x}u' = 0. \quad (4.3)$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \frac{dw}{dx}$; sustituyendo en (4.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w &= 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln w = -\ln x + C_1 = \ln x^{-1} + \ln C_1 = \ln(C_1 x^{-1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow w = C_1 x^{-1}.\end{aligned}$$

Pero $w = u' = \frac{du}{dx}$, por lo que

$$\frac{du}{dx} = C_1 x^{-1} \Rightarrow u = C_1 \int x^{-1} dx = C_1 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow u = C_1 \ln x + C_2.$$

Si tomamos, por ejemplo, $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, hallamos que $u = \ln x$. Ya que $y_2(x) = ux^{-1}$, entonces $y_2 = \frac{\ln x}{x}$.

Por lo tanto, la solución general de la ED:

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x.$$

□

Ejemplo 4.2.4 Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED dada y escribir su solución general.

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1(x) = e^{-2x}.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} y_2 &= ue^{-2x}; \\ y_2' &= u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} = (u' - 2u)e^{-2x}; \\ y_2'' &= u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x} = (u'' - 4u' + 4u)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$(2x + 1)y_2'' + 4xy_2' - 4y_2 = 0,$$

se obtiene

$$(2x + 1)(u'' - 4u' + 4u)e^{-2x} + 4x(u' - 2u)e^{-2x} - 4ue^{-2x} = 0.$$

Multiplicando por e^{2x} se tiene que

$$\begin{aligned} (2x + 1)(u'' - 4u' + 4u) + 4x(u' - 2u) - 4u &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x + 1)u'' + (-8x - 4 + 4x)u' + (8x + 4 - 8x - 4)u &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x + 1)u'' + (-4x - 4)u' &= 0. \end{aligned}$$

Dividiendo entre $(2x + 1)$ para normalizar:

$$u'' - \frac{4x + 4}{2x + 1}u' = 0. \quad (4.4)$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \frac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.4):

$$\frac{dw}{dx} - \frac{4x + 4}{2x + 1}w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{4x + 4}{2x + 1}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = \int \left(2 + \frac{2}{2x + 1}\right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln w = 2x + \ln(2x + 1) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = e^{2x} e^{\ln(2x+1)} e^{C_1} = e^{2x} (2x + 1) C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = C_1 (2x + 1) e^{2x}, \text{ pero } w = \frac{du}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = C_1 \int (2x + 1) e^{2x} dx.$$

$$\begin{aligned} t &= 2x + 1 \Rightarrow dt = 2 dx; \\ dv &= e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes:

$$u = C_1 \left[\frac{1}{2}(2x + 1)e^{2x} - \int e^{2x} dx \right] \Rightarrow u = C_1 x e^{2x} + C_2.$$

Tomando $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, hallamos que $y_2(x) = u e^{-2x} = x e^{2x} \cdot e^{-2x} = x$. Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-2x} + c_2 x.$$

□

Ejemplo 4.2.5 Utilizando el método de reducción de orden, calcular una segunda solución de la ED conocida y escribir su solución general.

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0; \quad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sin x.$$

▼ Si $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces:

$$y_2 = u x^{-\frac{1}{2}} \sin x;$$

$$y_2' = u' x^{-\frac{1}{2}} \sin x + u \left(x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x \right);$$

$$y_2'' = u'' x^{-\frac{1}{2}} \sin x + 2u' \left(x^{-\frac{1}{2}} \cos x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x \right) + u \left(-x^{-\frac{1}{2}} \sin x - x^{-\frac{3}{2}} \cos x + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \sin x \right).$$

Sustituyendo en $x^2 y_2'' + x y_2' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y_2 = 0$, se obtiene, después de algunas operaciones:

$$u'' x^{\frac{3}{2}} \sin x + 2u' x^{\frac{3}{2}} \cos x = 0.$$

De donde, dividiendo entre $x^{\frac{3}{2}}$:

$$u'' \sin x + 2u' \cos x = 0. \quad (4.5)$$

Si $u' = w$, entonces $u'' = \frac{dw}{dx}$. Sustituyendo en (4.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} \sin x + 2w \cos x = 0 &\Rightarrow \frac{dw}{dx} \sin x = -2w \cos x \Rightarrow \frac{dw}{w} = -2 \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln w = -2 \ln(\sin x) + C_1 = \ln(\sin x)^{-2} + \ln C_1 = \ln [C_1 (\sin x)^{-2}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow w = C_1 (\sin x)^{-2}. \end{aligned}$$

Pero $w = u' = \frac{du}{dx}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = C_1 \frac{1}{\sin^2 x} = C_1 \csc^2 x &\Rightarrow u = C_1 \int \csc^2 x dx = C_1 (-\cot x) + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = -C_1 \cot x + C_2 \Rightarrow u = C_1 \cot x + C_2. \end{aligned}$$

Si se toma $C_1 = 1$ & $C_2 = 0$, obtenemos $u = \cot x$, con lo que:

$$\begin{aligned} y_2 = u x^{-\frac{1}{2}} \sin x &= (\cot x) x^{-\frac{1}{2}} \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right) \sin x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ED

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

está dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x^{-\frac{1}{2}} \sin x + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow y(x) &= x^{-\frac{1}{2}} (c_1 \sin x + c_2 \cos x). \end{aligned}$$

□

Ejercicios 4.2.1 Reducción de orden. Soluciones en la página 9

Obtener la solución general de la ED conocida, considerando que y_1 es una solución de ella.

1. $2y'' + 3y' - 2y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$. .
2. $4y'' - 12y' + 9y = 0$; $y_1 = e^{\frac{3x}{2}}$. .
3. $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \sin 2x$. .
4. $y'' + 6y' + 9y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$. .
5. $y'' + 4y' + 13y = 0$; $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$. .
6. $9y'' - 4y = 0$; $y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$. .
7. $x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0$; $y_1 = x^2$. .
8. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$; $y_1 = \frac{1}{x}$. .
9. $x^2 y'' + 8xy' + 12y = 0$; $y_1 = x^{-3}$. .
10. $-x^2 y'' + xy' + 8y = 0$; $y_1 = x^4$. .
11. $(1-x)y'' + xy' - y = 0$; $y_1 = x$. .
12. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$. .
13. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$. .
14. $xy'' + (x-1)y' - y = 0$; $y_1 = e^{-x}$. .
15. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$; $y_1 = e^x$. .

Ejercicios 4.2.1 Reducción de orden. *Página 8*

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}.$

2. $y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{3x}{2}}.$

3. $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x.$

4. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}.$

5. $y = e^{-2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$

6. $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{2}{3}x}.$

7. $y = c_1 x^2 + c_2 x^5.$

8. $y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^3.$

9. $y = \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4}.$

10. $y = c_1 x^4 + \frac{c_2}{x^2}.$

11. $y = c_1 x + c_2 e^x.$

12. $y = \frac{1}{x} (c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x).$

13. $y = c_1 x + c_2 \ln x.$

14. $y = c_1 e^{-x} + c_2 (x - 1).$

15. $y = e^x (c_1 + c_2 x^2).$